НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0130-6553

ИССЛЕДОВАНИЯ

ПО ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ВЫПУСК 29

Бишкек «Илим» 2000

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0130-6553

ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ВЫПУСК 29

Бишкек «Илим» 2000

Лемма 2. Если $\beta > 0$ и $\forall(x,y) \in D \wedge \forall \xi \in [0,x]$:

$$\alpha_2(x,y) + (x-\xi)\beta_2(x,y) + \frac{1}{2}(\xi - x)^2 \gamma_2(x,y) \le 0, \text{ то}$$

$$\forall \xi \in [0,\chi(y)) \wedge y \in [0,h]: \vartheta_x(\chi(y),y;\xi,y) + \beta\vartheta(\chi(y),y;\xi,y) > 0.$$

Значит, в силу леммы 2 уравнение (27) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода и имеет единственное решение. Найдя из (27) неизвестную функцию $\chi_3(y)$ и подставляя её в (7),получим решение задачи 3.

Доказана следующая

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$\alpha_{1xx},\alpha_{2xy},\beta_{1xx},\beta_{2xy},\gamma_{1x},\gamma_{2x} \in C(D), \ \beta > 0$$

$$\forall(x,y) \in D \wedge \forall \xi \in [0,h]: \alpha_2(x,y) + (x-\xi)\beta_2(x,y) + \frac{1}{2}(\xi - x)^2 \gamma_2(x,y) \le 0$$

$$\chi_i(y) \in C^1[0,h], i = 1,3, \psi(x) \in C^3[0,\ell], \chi(y) \in C^1[0,h].$$

Тогда в области D решение задачи 3 существует и единственно.

Литература

1. Сопуев А. С. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа. Дис ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.- Бишкек, 1996.- 249 с.

2. Сопуев А., Асылбеков Т. Д. Функции Римана и представление общего решения гиперболических уравнений четвертого порядка // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.-Бишкек: Илим, 1998. -вып. 27 -С. 276-280.

3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Асылбеков Т. Д. Свойства функции Римана для гиперболического уравнения четвертого порядка // Науч. тр. ОшГУ. Физ.-мат. науки. - Ош: ОшГУ, 1999. - Вып. 2. - С. 89-98.

С.А.АБЛАКИМОВА., Э.Р. АТАМАНОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим псевдогиперболическое уравнение

$$u_{tt} = (\Delta u)_t + \alpha(\Delta u) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x})\frac{\partial u}{\partial x_i} + q(t,\bar{x})u + f(t,x), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x); \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x^n}, \quad t \in [0,T],$$

$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^{n-1}$, $x_n \in R$.

Требуется найти $q(t,\bar{x})$., если известно решение задачи (1)-(2) в точках плоскости

$$u|_{x_n=0} = F(t,\bar{x}), \tag{3}$$

где α – известное число, $a_i(t,\bar{x})$, f(t,x) – известные непрерывные функции. В области $(t,\bar{x}) \in [0,T] \times R^{n-1}$ выполняются условия согласования

$$F(0,\bar{x}) = \varphi(\bar{x},0); \quad F_t(0,\bar{x}) = \psi(\bar{x},0).$$

Псевдогиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа, при конвективной диффузии солей в пористой среде, распространении начальных уплотнений в вязком газе [1] обратные задачи для псевдогиперболического уравнения впервые изучались, по-видимому, в [2], позднее ряд некорректнопоставленных задач такого сорта рассматривался в работах [3,4] .

Введем обозначение

$$w(t,x) = u_t(t,x). \tag{4}$$

Тогда

$$u(t,x) = \int_0^t w(s,x)ds + \varphi(x). \tag{5}$$

Учитывая (4) и (5), уравнение (1) запишем в виде

$$\Delta w = -\int_0^t \alpha\Delta w(s,x)ds + w_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x})\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar{x})\int_0^t w(s,x)ds - \alpha\Delta\varphi(x) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - q(t,\bar{x})\varphi(x) - f(t,x). \tag{6}$$

Введем обозначение

$$f_1(t,x) = -\alpha\Delta\varphi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - f(t,x). \tag{7}$$

$$\Delta w = -\int_0^t \alpha \Delta w(s,x)ds + w_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i} ds - q(t,\bar{x}) \int_0^t w(s,x)ds -$$
$$- q(t,\bar{x})\varphi(x) + f_1(t,x). \qquad (8)$$

спользуя резольвенту

$(t,s) = -\alpha e^{-(t-s)}$ ядра $[-\alpha]$, получим

$$\Delta w = w_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i} ds - q(t,\bar{x}) \int_0^t w(s,x)ds - q(t,\bar{x})\varphi(x) + f_1(t,x) -$$
$$- \int_0^t \alpha e^{-(t-s)} \left[w_s(s,x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar{x}) \int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i} d\tau - q(s,\bar{x}) \int_0^s w(\tau,x)d\tau - q(s,\bar{x})\varphi(x) + f_1(s,x) \right] ds \qquad (9)$$

нтегрируя по частям и учитывая условие (2), имеем

$$\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} W_s(s,x)ds = \alpha W(t,x) - \alpha e^{-\alpha t} \psi(x) - \alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} W(s,x)ds. \qquad (10)$$

читывая формулу (10) и вводя обозначение

$$f_2(t,x) = -f_1(t,x) + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} f_1(s,x)ds - \alpha e^{-\alpha t} \psi(x), \qquad (11)$$

равнение (9), запишем в виде

$$w_t(t,x) = \Delta w + \alpha w(t,x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i} ds + q(t,\bar{x}) \int_0^t w(s,x)ds + q(t,\bar{x})\varphi(x) -$$
$$\alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} W(s,x)ds - \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar{x}) \int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i} d\tau + q(s,\bar{x}) \int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar{x})\varphi(x) \Bigg] ds + f_2(t,x) \qquad (12)$$

Введем обозначение

$$\upsilon(t,x) = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_n^2} \qquad (13)$$

Тогда из (12) имеем

$$\upsilon(t,x) = w_t(t,x) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \alpha w(t,x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i} ds - q(t,\bar{x}) \int_0^t w(s,x)ds - q(t,\bar{x})\varphi(x) +$$
$$+\alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} W(s,x)ds + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar{x}) \int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i} d\tau + q(s,\bar{x}) \int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar{x})\varphi(x) \right] ds - f_2(t,x). \qquad (14)$$

Отсюда полагая $x_n = 0$ и учитывая условия (3), имеем

$$\upsilon(t,x)_{x_n=0} = F_{tt}(t,\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F_t(t,\bar{x})}{\partial x_n^2} - \alpha F_t(t,\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial F_t(s,\bar{x})}{\partial x_i} ds - q(t,\bar{x})$$
$$\left[\dots \right] + \alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} F(s,\bar{x})ds + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar{x}) \int_0^s \frac{\partial F_\tau(\tau,\bar{x})}{\partial x_i} d\tau + q(s,\bar{x}) \left(\int_0^s F_\tau(\tau,\bar{x})d\tau + \varphi(\bar{x},0) \right) \right] ds - f_2(t,\bar{x},0). \qquad (15)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^t F_s(s,\bar{x})ds + \varphi(\bar{x},0) = F(t,\bar{x}) - F(0,\bar{x}) + \varphi(\bar{x},0) = F(t,\bar{x}). \qquad (16)$$

Предположим, что

$$F(t,\bar{x}) \neq 0 \qquad (17)$$

при всех $(t,x) \in [0,T] \times R^{n-1}$. Тогда из (15) имеем

$$q(t,x) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} \frac{F(s,\bar{x})}{F(t,\bar{x})} q(s,\bar{x})ds - \upsilon(t,x)\big|_{x_n=0} + f_3(t,\bar{x}) \; / \; F(t,\bar{x}), \qquad (18)$$

где

$$f_3(t,\bar{x}) = F_{tt}(t,\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 F_t(t,\bar{x})}{\partial x_i^2} - \alpha F_t(t,\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial F_t(s,\bar{x})}{\partial x_i} ds + \alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} F_s(s,\bar{x})ds +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} a_i(s,\bar{x}) \int_0^s \frac{\partial F_\tau(\tau,\bar{x})}{\partial x_i} d\tau - f_2(t,\bar{x},0). \qquad (19)$$

Уравнение (12) дважды дифференцируя по x_n и учитывая обозначение (13),имеем

$$\upsilon_t(t,x) = \Delta\upsilon + M[q, \upsilon, \upsilon_{x_1}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](t,x), \qquad (20)$$

где

$$M[q, \upsilon, \upsilon_{x}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](t,x) = \alpha\upsilon + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar{x}) \int_0^t \frac{\partial \upsilon(s,x)}{\partial x_i} ds + q(t,\bar{x}) \int_0^t \upsilon(s,x)ds +$$
$$+ q(t,\bar{x})\varphi_{x_n x_n}(x) - \alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \upsilon(s,x)ds - \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} \times$$
$$\times \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar{x}) \int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i} d\tau + q(s,\bar{x}) \int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar{x})\varphi_{x_n x_n}(x) \right] ds + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f_2(t,x). \qquad (21)$$

Ясно, что

$$\upsilon(0,x) = \psi_{x_n x_n}(x), \; x \in R^n \qquad (22)$$

Используя формулу Пуассона, из (20), (22) имеем

$$\upsilon(t,x) = \int_{R^n} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n \xi_n}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x,t,\xi,\tau) \; M[q, \upsilon, \upsilon_{x_1}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi, \qquad (23)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$,

$$G(x,t,\xi,\tau) = \left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-n} \exp[-(x-\xi)^2/(4(t+\tau))].$$

Дифференцируя по x_i $(i = 1,2,\dots, n-1)$ (23),имеем

$$\upsilon_{x_i}(t,x) = \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_i} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n \xi_n}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_i} G(x,t,\xi,\tau) \; M[q, \upsilon, \upsilon_{x}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi, \qquad (24)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Полагая в (23) $x_n = 0$, имеем

$$\Delta w = -\int_0^t \alpha\Delta w(s,x)ds + w_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar x)\int_0^t w(s,x)ds -$$
$$- q(t,\bar x)\varphi(x) + f_1(t,x). \qquad (8)$$

Используя резольвенту
R(t,s) = $-\alpha e^{-(t-s)}$ ядра $[-\alpha]$, получим

$$\Delta w = w_t - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar x)\int_0^t w(s,x)ds - q(t,\bar x)\varphi(x) + f_1(t,x) -$$
$$-\int_0^t \alpha e^{-(t-s)}\left[w_s(s,x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau - q(s,\bar x)\int_0^s w(\tau,x)d\tau - q(s,\bar x)\varphi(x) + f_1(s,x)\right]ds \qquad (9)$$

Интегрируя по частям и учитывая условие (2), имеем

$$\int_0^t \underbrace{\alpha e^{-\alpha(t-s)}}_{u}\, \underbrace{W_s(s,x)ds}_{dv} = \alpha W(t,x) - \alpha e^{-\alpha t}\psi(x) - \alpha^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} W(s,x)ds. \qquad (10)$$

Учитывая формулу (10) и вводя обозначение

$$f_2(t,x) = -f_1(t,x) + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} f_1(s,x)ds - \alpha e^{-\alpha t}\psi(x), \qquad (11)$$

уравнение (9), запишем в виде

$$W_t(t,x) = \Delta w + \alpha w(t,x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds + q(t,\bar x)\int_0^t w(s,x)ds + q(t,\bar x)\varphi(x) -$$
$$-\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}W(s,x)ds - \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau + q(s,\bar x)\int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar x)\varphi(x)\right]ds + f_2(t,x) \qquad (12)$$

Введем обозначение

$$\upsilon(t,x) = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_n^2}. \qquad (13)$$

Тогда из (12) имеем

$$\upsilon(t,x) = w_t(t,x) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - \alpha w(t,x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar x)\int_0^t w(s,x)ds - q(t,\bar x)\varphi(x) +$$
$$+\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}W(s,x)ds + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,\bar x)}{\partial x_i}d\tau + q(s,\bar x)\int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar x)\varphi(x)\right]ds - f_2(t,x). \qquad (14)$$

Отсюда полагая $x_n = 0$ и учитывая условия (3), имеем

$$\upsilon(t,x)_{x_n=0} = F_{tt}(t,\bar x) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 F_t(t,\bar x)}{\partial x_i^2} - \alpha F_t(t,\bar x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial F_s(s,\bar x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar x)$$
$$\left[\int_0^t F_s(s,\bar x)ds + \varphi(\bar x,0)\right] + \alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} F_s(s,\bar x)ds + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}$$

F(t,x)

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar x)\int_0^s \frac{\partial F_\tau(\tau,\bar x)}{\partial x_i}d\tau + q(s,\bar x)\left(\int_0^s F_\tau(\tau,\bar x)d\tau + \varphi(\bar x,0)\right)\right]ds - f_2(t,\bar x,0). \qquad (15)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^t F_s(s,\bar x)ds + \varphi(\bar x,0) = F(t,\bar x) - F(0,\bar x) + \varphi(\bar x,0) = F(t,\bar x). \qquad (16)$$

Предположим, что

$$F(t,\bar x) \neq 0 \qquad (17)$$

при всех $(t,x) \in [0,T] \times R^{n-1}$. Тогда из (15) имеем

$$q(t,x) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} \frac{F(s,\bar x)}{F(t,\bar x)} q(s,\bar x)ds - \upsilon(t,x)\big|_{x_n=0} + f_3(t,\bar x) \; / \; F(t,\bar x), \qquad (18)$$

?

где

$$f_3(t,\bar x) = F_{tt}(t,\bar x) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 F_t(t,\bar x)}{\partial x_i^2} - \alpha F_t(t,\bar x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial F_s(s,\bar x)}{\partial x_i}ds + \alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} F_s(s,\bar x)ds +$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} a_i(s,\bar x)\int_0^s \frac{\partial F_\tau(\tau,\bar x)}{\partial x_i}d\tau - f_2(t,\bar x,0). \qquad (19)$$

Уравнение (12) дважды дифференцируя по x_n и учитывая обозначение (13),имеем

$$\upsilon_t(t,x) = \Delta\upsilon + M[q, \upsilon, \upsilon_{x_1}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](t,x), \qquad (20)$$

уравнение теплопровод-ти

где

$$M[q, \upsilon, \upsilon_{x_1}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](t,x) = \alpha\upsilon + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t,\bar x)\int_0^t \frac{\partial \upsilon(s,x)}{\partial x_i}ds + q(t,\bar x)\int_0^t \upsilon(s,x)ds +$$
$$+q(t,\bar x)\varphi_{x_nx_n}(x) - \alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\upsilon(s,x)ds - \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} \times$$
$$\times\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(s,\bar x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau + q(s,\bar x)\int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar x)\varphi_{x_nx_n}(x)\right]ds + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f_2(t,x). \qquad (21)$$

Ясно, что

$$\upsilon(0,x) = \psi_{x_nx_n}(x),\ x \in R^n \qquad (22)$$

Используя формулу Пуассона, из (20), (22) имеем

$$\upsilon(t,x) = \int_{R^n} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x,t,\xi,\tau)\, M[q, \upsilon, \upsilon_{x_1}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi, \qquad (23)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$,

$$G(x,t,\xi,\tau) = \left(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-n}\exp[-(x-\xi)^2/(4(t+\tau))].$$

Дифференцируя по x_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ (23),имеем

$$\upsilon_{x_i}(t,x) = \int_{R^n}\frac{\partial}{\partial x_i}G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_{R^n}\frac{\partial}{\partial x_i}G(x,t,\xi,\tau)\, M[q, \upsilon, \upsilon_{x_1}, \dots, \upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi, \qquad (24)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Полагая в (23) $x_n = 0$, имеем

$$\upsilon(t,x)\Big|_{x_n=0} = \int\limits_{R^n} G(\bar{x},0,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \qquad (25)$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G(\bar{x},0,t,\xi,\tau)\, M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi.$$

Подставляя (25) в (18), получим

$$q(t,x) = \int\limits_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} \frac{F(s,\bar{x})}{F(t,\bar{x})} q(s,\bar{x})ds - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G(x,t,\xi,\tau)\, M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_{R^n} G(\bar{x},0,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \frac{f_3(t,\bar{x})}{F(t,\bar{x})}. \qquad (26)$$

Таким образом, в силу (23), (24) и (26) для определения неизвестных $\upsilon(t,x)$, $q(t,x)$, $\upsilon_{x_1}(t,x),\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}(t,x)$ получим следующую систему

$$\upsilon_{x_1}(t,x) = \int\limits_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_1} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_1} G(x,t,\xi,\tau)\, M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi,$$

$$\upsilon_{x_2}(t,x) = \int\limits_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_2} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_2} G(x,t,\xi,\tau)\, M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi,$$

....

$$\upsilon_{x_{n-1}}(t,x) = \int\limits_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} G(x,t,\xi,\tau)\, M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi, \qquad (27)$$

$$\upsilon(t,x) = \int\limits_{R^n} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G(x,t,\xi,\tau)\, M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi,$$

$$q(t,x) = \int\limits_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} \left[F(s,x)/F(t,x)\right] q(s,x)ds - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} G(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times M[q,\upsilon,\upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}](\tau,\xi)d\xi - \int\limits_{R^n} G(x,t,\xi,0)\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)d\xi + f_3(t,\bar{x})/F(t,\bar{x}).$$

Система нелинейных интегральных уравнений (27) является замкнутой системой нелинейных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\upsilon(t,x)$, $q(t,x)$, $\upsilon_{x_1}(t,x)$, $\upsilon_{x_2}(t,x),\ldots,\upsilon_{x_{n-1}}(t,x)$.

Поэтому при малых T она однозначно разрешима, т.е. справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА: Пусть: 1) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – дважды дифференцируемые ограниченные функции R^n. 2) функции $a_i(t,\bar{x})$, $F(t,\bar{x})$, $F_a(t,\bar{x})$, $F_{x_ix_i}(t,\bar{x})$ – непрерывные ограниченные функции в области $[0,T]\times R^{n-1}$, $i=1,2,\ldots,n-1$; 3) $|F(t,\bar{x})| \geq a_* > 0$, при $(t,\bar{x}) \in [0,T]\times R^{n-1}$; 4) $f(t,x)$ и $f_{x_nx_n}(t,x)$ – непрерывные ограниченные функции в области $[0,T]\times R^n$. Тогда существует достаточно малое число $T > 0$ такое, что существует единственное решение $q(t,\bar{x})$ обратной

задачи (1)-(3) в пространстве $C([0,T]\times R^{n-1})$, где $C([0,T]\times R^{n-1})$ – пространство непрерывных ограниченных функций в области $[0,T]\times R^{n-1}$.

Литература

1. Войтт С.С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе //Уч.записки МГУ, Механика.- 1954 - Вып.172. N5.- С.125-142.
2. Атаманов Э.Р. О единственности восстановления правой части уравнения в частных производных третьего порядка //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям.- Фрунзе.: Илим.- Вып.18 – 1985.- С.160-165.
3. Атаманов Э.Р. О единственности решения трехточечной задачи для псевдогиперболического уравнения //Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Издательство Красноярского университета.- 1988.- С.34-37.
4. Атаманов Э.Р. О единственности решения внутренних задач для псевдогиперболического уравнения. //Исслед. по интегро-дифф. уравнениям.- Фрунзе.: Илим.- Вып.21 -1988 - С.262-268.