НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ISSN 0130-6553

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ВЫПУСК 30

Бишкек «Илим» 2001

С.А.АБЛАКИМОВА, Э.Р.АТАМАНОВ

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим псевдогиперболическое уравнение

$$u_{tt} = (\Delta u)_t + \alpha(\Delta u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + q(t,\bar{x})u + f(t,x) \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \qquad (2)$$

где $t\in[0, T]$, $x=(x_1,\dots, x_{n-1}, x_n) \in R^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in R^{n-1}$,
α- известное число, $a_i(t, x)$ и $f(t,x)$ – известные непрерывные функции в области $[0, t]\times R^n$, $i=1,\dots, n$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – известные непрерывные функции в области R^n.

Требуется найти $q(t, \bar{x})$, если известно решение задачи (1) –(2) в точках плоскости

$$u|_{x_n=0} = F(t,\bar{x}), \quad \bar{x}\in R^{n-1}. \qquad (3)$$

Предположим, что в области R^{n-1} выполняются условия согласования

$$F(0, \bar{x}) = \varphi(\bar{x}, 0), \quad F_t(0, \bar{x}) = \psi(\bar{x}, 0). \qquad (4)$$

Псевдогиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа, при конвективной диффузии солей в пористой среде, распространении начальных уплотнений в вязком газе [1]. Обратные задачи для псевдогиперболического уравнения впервые изучались, по-видимому, в [2], позднее ряд некорректно поставленных задач такого сорта рассматривался в работах [3,4].

Введем обозначение

$$W(t,x) = u_t(t,x). \qquad (5)$$

Тогда

$$u(t,x) = \int_0^t W(s,x)ds + \varphi(x). \qquad (6)$$

Учитывая (5) и (6), уравнение (1) запишем в виде

$$\Delta W = -\int_0^t \alpha\Delta W(s,x)ds + W_t - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\int_0^t \frac{\partial W(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar{x})\int_0^t W(s,x)ds -$$
$$-q(t,\bar{x})\varphi(x) + f_1(t,x), \qquad (7)$$

где

$$f_1(t,x) = -\alpha\Delta\varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - f(t,x). \qquad (8)$$

Используя резольвенту $R(t,s) = -\alpha^{-\alpha(t-s)}$ ядра $[-\alpha]$, из (7) получим

$$\Delta W = W_t - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar{x})\int_0^t w(s,x)ds - q(t,\bar{x})\varphi(x) + f_1(t,x) -$$
$$-\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\left[w_s(s,x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(s,x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau - q(s,\bar{x})\int_0^s w(\tau,x)d\tau - q(s,\bar{x})\varphi(x) + f_1(s,x)\right]ds. \qquad (9)$$

Интегрируя по частям и учитывая условие (2), имеем

$$\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} w_s(s,x)ds = \alpha w(t,x)ds - \alpha e^{-\alpha t}\psi(x) - \alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} w(s,x)ds \qquad (10)$$

Учитывая формулу (10) и вводя обозначение

$$f_2(t,x) = -f_1(t,x) + \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)} f_2(t,x)ds - \alpha e^{-\alpha t}\psi(x), \qquad (11)$$

уравнение (9), запишем в виде

$$w_t(t,x) = \Delta w + \alpha w(t,x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds + q(t,\bar{x})\int_0^t w(s,x)ds + q(t,\bar{x})\varphi(x) -$$
$$-\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}w(s,x)ds -$$
$$-\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(s,x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau + q(s,\bar{x})\int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar{x})\varphi(x)\right]ds + f_2(t,x). \qquad (12)$$

Введем обозначение

$$v(t,x) = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x_n^2}. \qquad (13)$$

Тогда из (12) имеем

$$v(t,x) = w_t(t,x) - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} - \alpha w(t,x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\int_0^t \frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds - q(t,\bar{x})\int_0^t w(s,x)ds -$$
$$-q(t,\bar{x})\varphi(x) + \alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}w(s,x)ds +$$
$$+\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(s,x)\int_0^s \frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau + q(s,\bar{x})\int_0^s w(\tau,x)d\tau + q(s,\bar{x})\varphi(x)\right]ds - f_2(t,x). \qquad (14)$$

Отсюда полагая $x_n = 0$ и учитывая условие (3), имеем

$$v(t,x)\big|_{x_n=0}=F_{tt}(t,\bar{x})-$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 F_t(t,\bar{x})}{\partial x_i^2}-\alpha F_t(t,\bar{x})-\sum_{i=1}^{n-1}a_i(t,\bar{x},0)\int_0^t\frac{\partial F_s(s,\bar{x})}{\partial x_i}ds-a_n(t,\bar{x},0)\int_0^t\left[\frac{\partial w(s,x)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}\right]ds-$$
$$-q(t,\bar{x})\,[\int_0^t F_s(s,\bar{x})ds+\varphi(\bar{x},0)]+\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}F_s(s,\bar{x})ds+$$
$$+\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}a_i(s,\bar{x},0)\int_0^s\frac{\partial F_\tau(\tau,\bar{x})}{\partial x_i}+a_n(s,\bar{x},0)\int_0^s\left[\frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}\right]d\tau+\right.$$
$$\left.+q(s,\bar{x})\left[\int_0^s F_\tau(\tau,\bar{x})d\tau+\varphi(\bar{x},0)\right]\right\}ds-f(t,\bar{x},0). \qquad (15)$$

Учитывая условия согласования (4), можно убедиться, что

$$\int_0^t F_s(s,\bar{x})ds+\varphi(\bar{x},0)=F(t,\bar{x}) \qquad (16)$$

Предположим, что

$$F(t,\bar{x})\neq 0 \qquad (17)$$

при всех $(t,\bar{x})\in[0,T]\times R^{n-1}$. Тогда, учитывая (16) и (17), из (15) имеем

$$q(t,\bar{x})=\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\frac{F(s,\bar{x})}{F(t,\bar{x})}q(s,\bar{x})ds-v(t,x)\big|_{x_n=0}-a_n(s,\bar{x},0)\int_0^t\left[\frac{\partial w(s,x)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}\right]ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^s \alpha e^{-\alpha(t-s)}a_n(s,\bar{x},0)\left[\frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}\right]d\tau ds+f_3(t,\bar{x}), \qquad (18)$$

где

$$f_3(t,x)=\frac{11}{F(t,\bar{x})}\left\{F_{tt}(t,\bar{x})-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 F_t(t,\bar{x})}{\partial x_i^2}-\alpha F(t,\bar{x})-\right.$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}a_i(t,\bar{x},0)\int_0^t\frac{\partial F_s(s,\bar{x})}{\partial x_i}ds+\alpha^2\int_0^t F_s(s,\bar{x})ds+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}a_i(s,\bar{x},0)\int_0^s\frac{\partial F_\tau(\tau,\bar{x})}{\partial x_i}d\tau\, ds-f_2(t,\bar{x},0), \qquad (19)$$

$f_2(t,x)$ определяется с помощью формулы (11) и (8).

Уравнение (12), дифференцируя по x_n и вводя обозначение

$$z(t,x)=\frac{\partial w(t,x)}{\partial x_n}, \qquad (20)$$

имеем

$$z_t(t,x)=\Delta z+M[q,z,w_{x_1},\ldots,w_{x_n},z_{x_1},\ldots,z_{x_n}](t,x), \qquad (21)$$

где

$$M[q,z,w_{x_1},\ldots,w_{x_n},z_{x_1},\ldots,z_{x_n}](t,x)=\alpha z(t,x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(t,x)}{\partial x_n}\int_0^t\frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\int_0^t\frac{\partial z(s,x)}{\partial x_i}ds+q(t,\bar{x})\left[\int_0^s z(\tau,\bar{x})ds+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right]-$$
$$-\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}z(s,x)ds-$$
$$-\int_0^t\alpha e^{-\alpha(t-s)}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(s,x)\int_0^s\frac{\partial z(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau+q(s,\bar{x})\int_0^s z(\tau,x)d\tau+q(s,\bar{x})\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n}\right]ds+\frac{\partial f_2(t,x)}{\partial x_n} \qquad (22)$$

Теперь дифференцируя уравнение (21) по x_n и учитывая обозначение (13), (20) и (22), имеем

$$V_t=\Delta v+N[q,v,w_{x_1},\ldots,w_{x_n},z_{x_1},\ldots,z_{x_n}\ v_{x_1},\ldots,v_{x_n}](t,x), \qquad (23)$$

где

$$N[q,v,w_{x_1},\ldots,w_{x_n},z_{x_1},\ldots,z_{x_n}\ \upsilon_{x_1},\ldots,\upsilon_{x_n}](t,x)=\alpha v(t,x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 a_i(t,x)}{\partial x_n^2}\int_0^t\frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(t,x)}{\partial x_n}\int_0^t\frac{\partial z(s,x)}{\partial x_i}ds+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\int_0^t\frac{\partial v(s,x)}{\partial x_i}ds+q(t,\bar{x})\times$$
$$\times\left[\int_0^s v(s,\bar{x})ds+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n}\right]-\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}v(s,x)ds-$$
$$-\int_0^t\alpha e^{-\alpha(t-s)}[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 a_i(s,x)}{\partial x_n^2}\int_0^s\frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(s,x)}{\partial x_i}d\tau\int_0^s+\sum_{i=1}^{n}a_i(s,x)\int_0^s\frac{\partial v(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau+$$
$$+q(s,\bar{x})\int_0^s v(\tau,x)d\tau+q(s,\bar{x})\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n}]ds+\frac{\partial^2 f_2(t,x)}{\partial x_n^2} \qquad (24)$$

Ясно, что

$$w(0,x)=\psi(x),\quad x\in R^n, \qquad (25)$$
$$z(0,x)=\psi_{x_n}(x),\quad x\in R^n, \qquad (26)$$
$$v(0,x)=\psi_{x_n x_n}(x),\quad x\in R^n \qquad (27)$$

Используя формулу Пуассона, из (12), (25) имеем

$$W(t,x)=\int_{R^n}G(x,t,\xi,0)\psi(\xi)d\xi+\int_0^t d\tau\int_{R^n}G(x,t,\xi,\tau)L[q,w,w_{x_1},\ldots,w_{x_n}](\tau,\xi)d\xi d\tau, \qquad (28)$$

где $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$,

$$L[q,w,w_{x_1},\ldots,w_{x_n}](t,x)=\alpha w(t,x)+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\int_0^t\frac{\partial w(s,x)}{\partial x_i}ds+q(t,\bar{x})[\int_0^t w(s,x)ds+\varphi(x)]-$$
$$-\alpha^2\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}w(s,x)ds-$$
$$-\int_0^t\alpha e^{-\alpha(t-s)}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(s,x)\int_0^s\frac{\partial w(\tau,x)}{\partial x_i}d\tau+q(s,\bar{x})\int_0^s w(\tau,x)d\tau+q(s,\bar{x})\varphi(x)\right]ds+f_2(t,x),$$

$$G(x,t,\xi,\tau) = (2\sqrt{\pi(t-\tau)})^{n}\exp[-(x-\xi)^2/(4(t-\tau))]. \qquad (29)$$

Аналогичным образом, используя формулу Пуассона, из (21), (26) и (23), (27) имеем

$$Z(t,x) = \int_{R^n} G(x,t,\xi,0)\,\psi_{\xi_n}(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x,t,\xi,\tau)\,M[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi d\tau, \qquad (30)$$

$$V(t,x) = \int_{R^n} G(x,t,\xi,0)\,\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x,t,\xi,\tau)\,N[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}, v_{x_1},\dots,v_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi d\tau. \qquad (31)$$

Полагая в (31) $x_n = 0$, имеем

$$V(t,\bar{x},0) = \int_{R^n} G(\bar{x},t,\xi,0)\,\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} G(\bar{x},t,\xi,\tau)\,L[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}, v_{x_1},\dots,v_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi. \qquad (32)$$

Дифференцируя по x_i (28), (30) и (31), получим

$$w_{x_i}(t,x) = \int_{R^n} G_{x_i}(x,t,\xi,0)\,\psi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} G_{x_i}(x,t,\xi,\tau)\,M[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}, v_{x_1},\dots,v_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi, \quad i=1,\dots,n, \qquad (33)$$

$$z_{x_i}(t,x) = \int_{R^n} G_{x_i}(x,t,\xi,0)\,\psi_{\xi_n}(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} G_{x_i}(x,t,\xi,\tau)\,N[q, z, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (34)$$

$$v_{x_i}(t,x) = \int_{R^n} G(\bar{x},t,\xi,0)\,\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} G(\bar{x},t,\xi,\tau)\,N[q, v, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}, v_{x_1},\dots,v_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi. \qquad (35)$$

Полагая в (33) для $w_{x_i}(t,x)$ $x_n = 0$, имеем

$$w_{x_i}(t,x)\big|_{x_n=0} = \int_{R^n} [G(\bar{x},t,\xi,0)]_{x_n=0}\,\psi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} [G(\bar{x},t,\xi,\tau)]_{x_n=0}\,L[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi. \qquad (36)$$

Подставляя (32) и (36) в (18), получим

$$q(t,\bar{x}) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\frac{F(s,\bar{x})}{F(t,\bar{x})}\,q(s,\bar{x})\,ds - \int_{R^n} G(\bar{x},t,\xi,0)\,\psi_{\xi_n\xi_n}(\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{R^n} G(\bar{x},t,\xi,\tau)\,N[q, v, w_{x_1},\dots,w_{x_n}, z_{x_1},\dots,z_{x_n}, v_{x_1},\dots,v_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi -$$

$$-\ a_n(t,\bar{x},0)\int_0^t \Big\{ \int_{R^n} [G(\bar{x},t,\xi,\tau)]_{x_n=0}\,\psi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^n} [G_{x_n}(\bar{x},t,\xi,\tau)]_{x_n=0}\,L[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}](\tau,\xi)\,d\xi.\Big\}\,ds +$$

$$+\int_0^t\int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-s)}\,a_n(s,\bar{x},0)\Big\{ \int_{R^n} [G_{x_n}(x,t,\xi,0)]_{x_n=0}\,\psi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int_0^t d\nu \int_{R^n} [G_{x_n}(x,t,\xi,\nu)]_{x_n=0}\,L[q, w, w_{x_1},\dots,w_{x_n}](\nu,\xi)\,d\xi.\Big\}\,d\tau ds + f_3(t,\bar{x}). \qquad (37)$$

Таким образом, для определения неизвестных $q(t,\bar{x}), v(t,x), w(t,x), z(t,x), v_{x_1}(t,x),\dots,v_{x_n}(t,x), w_{x_1}(t,x),\dots,w_{x_n}(t,x), z_{x_1}(t,x),\dots,z_{x_n}(t,x)$ получим замкнутую систему $3n + 4$ нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода (28), (30), (31), (33), (34), (35) и (37). Поэтому при малых T система однозначно разрешима, т.е справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть: 1) $\varphi(x)$, $\psi(x)$; $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i^2\partial x_n}, \frac{\partial^4\varphi}{\partial x_i^2\partial x_n^2}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x_n^2}$ *(i=1, 2, ..., n)- -ограниченные и непрерывные функции в* R^n;

2) $a_i(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x_n}a_i(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}a_i(t,x)$ *(i = 1, 2, ..., n),* $f(t,x)$, $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_n}$, $\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_n^2}$ *- ограниченные и непрерывные функции в области* $[0, T]\times R^n$;

3) $F(t,\bar{x}) \neq 0$ *при* $(t,\bar{x}) \in [0, T]\times R^{n-1}$ *и* $F(t,\bar{x})$, $F_n(t,\bar{x})$, $\frac{\partial}{\partial x_i}F_i(t,\bar{x})$, $\frac{\partial^2 F_i(t,\bar{x})}{\partial x_i}$ *(i = 1, 2, ..., n-1) - непрерывные и ограниченные функции в области* $[0, T]\times R^{n-1}$. *Тогда существует положительное число T такое, что обратная задача (1)-(3) имеет единственное решение* $q(t,\bar{x})$ *в пространстве* $C([0, T]; R^{n-1})$, *где* $C([0, T]; R^{n-1})$ *– пространство ограниченных непрерывных функций в области* $[0, T]\times R^{n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтт С.С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе //Уч. записки МГУ. Механика-1954.- Вып. 172. N 5.- С.125-142.
2. Атаманов Э.Р. О единственности восстановления правой части уравнения в частных производных третьего порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим. - Вып.18.- 1985.- с.160-165.
3. Атаманов Э.Р. О единственности решения трехточечной задачи для псевдогиперболического уравнения //Условно-корректные задачи матем. физики и анализа. Изд-во Красноярского университета. - 1988.- С.34-37.
4. Аблакимова С.А., Атаманов Э.Р. Обратная задача для псевдогиперболического уравнения //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.– Бишкек: Илим.- Вып.29.- 2000.- С.341-345.

У.М.ИМАНАЛИЕВ, Т.М.ИМАНАЛИЕВ

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе авторы исследуют нелинейные дифференциальные уравнения четвертого порядка вида

$$u_{tt}(t,x)-u_{xx}-u_{xxx}+(A(t,x)u^2(t,x))_{xx}+u_{txxx}(t,x)=f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

с начальными условиями $u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=\psi(x).$ (2)

Задача (1)-(2) при $f(t,x,u)\equiv 0$, $A(t,x)=1$ изучалась многими авторами. Такое уравнение в литературе называется волновым уравнением типа Буссинеска. Уравнение (1) с начальным условием (2) принадлежит к регуляризованным уравнениям типа Буссинеска [1-3].

Предположим, что $A(t,x)\in \overline{C}^{(0\,1)}([0,T]\times R)$,

$f(t,x,u)\in C([[0,T]\times R\times R)\cup Lip(L|_u)$, $\varphi(x),\psi(x)\in C^2(R)$.

Задача (1)-(2) сводится к интегральному уравнению следующим методом: положим

$$u_{tt}-u_{xx}=z(t,x)-A(t,x)u^2(t,x), \tag{3}$$

где $z(t,x)$-новая неизвестная функция, подлежащая определению.

Тогда имеем

$$u_{ttxx}-u_{xxxx}=z_{xx}-\left(A(t,x)u^2(t,x)\right)_{xx}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}+(A(t,x)u^2(t,x))_{xx}+u_{ttxx}=z_{xx}+z_x-A(t,x)u^2(t,x). \tag{5}$$

Учитывая (1) из (5), получаем

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}+(A(t,x)u)_{xx}+u_{ttxx}=f(t,x,u)=z_{xx}+z-A(t,x)u^2(t,x). \tag{6}$$

Отсюда для определения неизвестной функции $z(t,x)$ получаем уравнение

$$z_{xx}(t,x)-z(t,x)=f(t,x,u(t,x))+A(t,x)u^2(t,x). \tag{7}$$

Из уравнения (7) неизвестная функция $z(t,x)$ выражается через функции $u(t,x)$ в виде:

$$z(t,x)=\int_{-\infty}^{x}\sin(x-s)\left[f(t,x,u(t,x))+A(t,x)u^2(t,x)\right]ds. \tag{8}$$

В самом деле,

$$z_x=\int_{-\infty}^{x}\cos(x-s)\left[f(t,x,u(t,x))+A(t,x)u^2(t,x)\right]ds$$

$$z_{xx}=f(t,x,u(t,x))+A(t,x)u^2(t,x)-\int_{-\infty}^{x}\sin(x-s)\left[f(t,x,u(t,x))+A(t,x)u^2(t,x)\right]ds. \tag{9}$$